「解答例」

選抜区分	2025 年度　（選抜区分：一般選抜） 経済学部　　（科目名：数学）

問題１

(1) a_n と b_n の定義から, $f_n(x)$ を次のように表せる.

$$f_n(x) = a_n \cdot x + b_n$$

$f_1(x) = 2x + 1$ より, $a_1 = 2,\ b_1 = 1$ である.

(2) $f_n(x)$ と $f_{n+1}(x)$ を与式に代入すると,

$$n\ (a_{n+1} \cdot x + b_{n+1}) = (n+2)(a_n \cdot x + b_n) + n$$

x の係数と定数項を整理すると,

$$n \cdot a_{n+1} = (n+2)\ a_n \qquad \cdots ①$$
$$n \cdot b_{n+1} = (n+2)\ b_n + n \qquad \cdots ②$$

となる. ① より,

$$\frac{a_{n+1}}{n+2} = \frac{a_n}{n}$$

両辺を $(n+1)$ で割ると,

$$\frac{a_{n+1}}{(n+1)(n+2)} = \frac{a_n}{n(n+1)}$$

これがすべての n について成り立つので,

$$\frac{a_n}{n(n+1)} = \frac{a_{n-1}}{(n-1)n} = \frac{a_{n-2}}{(n-2)(n-1)} = \cdots = \frac{a_1}{1 \cdot 2} = 1$$

数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n = n(n+1)$ である.

(3) (2) の結果より, $a_n \neq 0\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ であるから, ① と ② より,

$$\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} = \frac{b_n}{a_n} + \frac{n}{(n+2)a_n}$$

を得る. この右辺の第 2 項に (2) の結果 $a_n = n(n+1)$ を代入すると,

$$\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} - \frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

となる.

(4) (3) の結果より, 数列 $\left\{\dfrac{b_n}{a_n}\right\}$ の階差数列が $\left\{\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}$ であるから, $n \geqq 2$ のとき,

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{b_1}{a_1} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{b_1}{a_1} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right)$$

が成立する. $a_1 = 2,\ b_1 = 1$ であるから,

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{n}{n+1}$$

となる. これは $n = 1$ のときも成立する. よって、数列 $\left\{\dfrac{b_n}{a_n}\right\}$ の一般項は $\dfrac{b_n}{a_n} = \dfrac{n}{n+1}$ である.

(5) (2), (4) の結果より, 数列 $\{b_n\}$ の一般項は $b_n = n^2$ となる．これらを $S_n(x)$ に代入すると,

$$\begin{aligned}
S_n(x) &= \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot x + \sum_{k=1}^{n} b_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} (k^2 + k) \cdot x + \sum_{k=1}^{n} k^2 \\
&= \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right] x + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \frac{n(n+1)(2n+4)}{6} x + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \frac{n(n+1)}{6} \left[(2n+4)x + (2n+1)\right]
\end{aligned}$$

$n > 0$ であるから, $S_n(x) = 0$ のとき, $x = -\dfrac{2n+1}{2n+4}$ である.

問題２

(1)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\{(x+2)(x-1)(x-3)\} &= \frac{d}{dx}\left(x^3 - 2x^2 - 5x + 6\right) \\
&= 3x^2 - 4x - 5.
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
\int_0^4 \left|x^2 - 2x - 3\right| \, dx &= \int_0^4 |(x+1)(x-3)| \, dx \\
&= -\int_0^3 (x+1)(x-3)\, dx + \int_3^4 (x+1)(x-3)\, dx \\
&= -\int_0^3 (x^2 - 2x - 3)\, dx + \int_3^4 (x^2 - 2x - 3)\, dx \\
&= -\left[\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x\right]_0^3 + \left[\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x\right]_3^4 \\
&= \frac{34}{3}.
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
\int_{-x}^{x} \left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{t^3}{6} + \frac{t^2}{2} + t + 1\right)\right\} dt &= \int_{-x}^{x} \left(\frac{t^2}{2} + t + 1\right) dt \\
&= \left[\frac{t^3}{6} + \frac{t^2}{2} + t\right]_{-x}^{x} \\
&= \frac{x^3}{3} + 2x.
\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}
\int_{-x}^{x} \frac{d}{du}\left\{\int_{-u}^{u} (t^2 + t + 1)\, dt\right\} du &= \int_{-x}^{x} \frac{d}{du}\left(\left[\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + t\right]_{-u}^{u}\right) du \\
&= \int_{-x}^{x} \frac{d}{du}\left(\frac{2u^3}{3} + 2u\right) du \\
&= \int_{-x}^{x} (2u^2 + 2)\, du \\
&= \left[\frac{2u^3}{3} + 2u\right]_{-x}^{x} \\
&= \frac{4x^3}{3} + 4x.
\end{aligned}$$

(5) $A = \int_{-1}^{3} f(t)\,dt$ とすると，$f(x) = x^2 + 2Ax$ であるから，

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^{3} (t^2 + 2At)\,dt \\
&= \left[\frac{t^3}{3} + At^2\right]_{-1}^{3} \\
&= 8A + \frac{28}{3}
\end{aligned}
$$

より，$A = -\frac{4}{3}$．ゆえに，$f(x) = x^2 - \frac{8}{3}x$.

問題3

(1) 三平方の定理より, $\mathrm{AB}^2 = \left(\sqrt{6}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 = 8$ であり, $\mathrm{AB} > 0$ なので, $\mathrm{AB} = 2\sqrt{2}$. 同様に, $\mathrm{AC}^2 = \left(\sqrt{6}\right)^2 + \left(\sqrt{6}\right)^2 = 12$, $\mathrm{AC} > 0$ なので, $\mathrm{AC} = 2\sqrt{3}$.

(2) 余弦定理より,

$$
\begin{aligned}
\cos\angle\mathrm{ABC} =& \frac{\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 - \mathrm{CA}^2}{2\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}} \\
=& \frac{8 + \left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2 - 12}{2\cdot(2\sqrt{2})\cdot(\sqrt{6}+\sqrt{2})} \\
=& \frac{-4 + 6 + 2\cdot 2\sqrt{3} + 2}{8(\sqrt{3}+1)} \\
=& \frac{4(\sqrt{3}+1)}{8(\sqrt{3}+1)} \\
=& \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

(3) (2) より, $\angle\mathrm{ABC} = 60^\circ$ であるから, 正弦定理より $2R\sin 60^\circ = 2\sqrt{3}$ なので, $R = \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2$ である.

(4) 線分 AB の中点は $\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ で, 直線 AB の傾きは $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ であるから, 線分 AB の垂直二等分線は,

$$
y - \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{3}\left(x - \frac{\sqrt{6}}{2}\right)
$$

である．また, 線分 BC の垂直二等分線は $y = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ であり, S は, この 2 直線の交点であるので,

$$
\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{3}\left(x - \frac{\sqrt{6}}{2}\right)
$$

これから, $x = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ である．よって S の座標は $\left(\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)$ である.

(5) 正弦定理より, $\sin\angle\mathrm{CAB} = \dfrac{\mathrm{BC}}{2R} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ である.

問題4

(1) 偏りのあるさいころの 1 の目の出る確率は $\dfrac{2}{7}$, その他の目は $\dfrac{1}{7}$.

よって, 3 つのさいころの目の合計が 3, つまりすべてのさいころの目が 1 である確率は,

$$
\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{7} = \frac{1}{126}.
$$

(2) 3 つのさいころの目の合計が 4 となるのは, $(1,1,2),(1,2,1),(2,1,1)$ の 3 つの出目である．ここで, 1, 2 個目の数値が偏りのないさいころの目, 3 つ目の数値が偏りのあるさいころの目とする．合計が 4 となる確率は以下のように計算できる.

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{7}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{7}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{7}=\frac{5}{252}.$$

(3) 3 つのさいころの目の合計が 3 となる確率は (1) より $\frac{1}{126}$.

3 つのさいころの目の合計が 4 となる確率は (2) より $\frac{5}{252}$.

3 つのさいころの目の合計が 5 となる確率は (2) と同様に $(1,2,2)$ あるいは $(1,1,3)$ の組み合わせの目がでる確率を計算して合計すると求めることができる.

$(1,2,2)$ の組み合わせの出る確率は,

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{7}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{7}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{7}=\frac{4}{252}.$$

$(1,1,3)$ の組み合わせの出る確率は,

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{7}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{7}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{7}=\frac{5}{252}.$$

よって，3 つのさいころの目の合計が 5 となる確率は $\frac{9}{252}$.

これらより，合計が 6 以上になる確率を計算すると,

$$1-\left(\frac{1}{126}+\frac{5}{252}+\frac{9}{252}\right)=1-\frac{4}{63}=\frac{59}{63}.$$

(4) 求める確率は, $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}\right)=\frac{11}{21}$.

(5) A を 1 の目が出る事象とすると, $P(A)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{7}=\frac{13}{63}$.
B を偏りのあるさいころを選ぶ事象とすると, $P(B)=\frac{1}{3}$. 偏りのあるさいころを選んだときに 1 の目が出る条件付き確率は, $P_B(A)=\frac{2}{7}$.

乗法定理より, 選んださいころが偏りのあるさいころで, かつ, 1 の目が出る確率は,

$$P(A\cap B)=P(B)P_B(A)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{7}=\frac{2}{21}.$$

1 の目が出たときに投げたさいころが偏ったさいころである確率は,

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{2}{21}\cdot\frac{63}{13}=\frac{6}{13}.$$

別解：ベイズの定理より,

$$P_A(B)=\frac{P(B)P_B(A)}{P(A)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{63}{13}=\frac{6}{13}.$$