「解答例」

選抜区分	2026 年度　（選抜区分：一般選抜） 経済学部　　（科目名：数学）

問題１

(1) $a_2 = 5a_1 - 16 \cdot 1 = 5 \cdot 3 - 16 \cdot 1 = -1,$
$a_3 = 5a_2 - 16 \cdot 2 = 5 \cdot (-1) - 16 \cdot 2 = -37,$
$a_4 = 5a_3 - 16 \cdot 3 = 5 \cdot (-37) - 16 \cdot 3 = -233.$

(2) $b_n = a_{n+1} - a_n$ なので,
$b_{n+1} = a_{n+2} - a_{n+1} = 5a_{n+1} - 16(n+1) - 5a_n + 16n = 5(a_{n+1} - a_n) - 16.$
よって, $b_{n+1} = 5b_n - 16.$

(3) (2) より, $b_{n+1} = 5b_n - 16.$
これより, $b_{n+1} - 4 = 5(b_n - 4).$
また, $b_1 - 4 = a_2 - a_1 - 4 = -1 - 3 - 4 = -8.$
よって, 数列 $\{b_n - 4\}$ は初項 -8, 公比 5 の等比数列となるので,
$b_n - 4 = (-8) \cdot 5^{n-1}$. より, $b_n = (-8) \cdot 5^{n-1} + 4.$

(4) $n \geqq 2$ のとき,

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}((-8) \cdot 5^{k-1} + 4) \\ &= 3 + (-8) \cdot \frac{5^{n-1} - 1}{5 - 1} + 4(n-1) \\ &= (-2) \cdot 5^{n-1} + 4n + 1. \end{aligned}$$

$n = 1$ のとき, $(-2) \cdot 5^0 + 4 \cdot 1 + 1 = 3$ なので, $n = 1$ のときも成り立つ.
よって, $a_n = (-2) \cdot 5^{n-1} + 4n + 1.$

(5) $S_n = \sum_{k=1}^{n}((-2) \cdot 5^{k-1} + 4k + 1) = (-2)\sum_{k=1}^{n} 5^{k-1} + 4\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1.$
ここで,
$\sum_{k=1}^{n} 5^{k-1} = \dfrac{5^n - 1}{5 - 1} = \dfrac{5^n - 1}{4}.$
$\sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}.$
$\sum_{k=1}^{n} 1 = n.$
これらを用いて,
$S_n = (-2) \cdot \dfrac{5^n - 1}{4} + 4 \cdot \dfrac{n(n+1)}{2} + n = -\dfrac{5^n}{2} + 2n^2 + 3n + \dfrac{1}{2}.$

問題２

(1)

$$\begin{aligned} \int_0^3 f(x)dx &= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x\right]_0^3 \\ &= \frac{27}{3} - \frac{9}{2} - 18 \\ &= 9 - \frac{9}{2} - 18 = -\frac{27}{2}. \end{aligned}$$

(2) $a=\dfrac{2}{3}$ であるから, $g(x)=|x^2+(4-3\cdot\dfrac{2}{3})-12\cdot\dfrac{2}{3}|=|x^2+2x-8|$ である.
$0 \leqq x \leqq 2$ において, $x^2+2x-8 \leqq 0$ であり, $2 \leqq x \leqq 3$ において, $x^2+2x-8 \geqq 0$ なので,

$$\begin{aligned}
\int_0^3 \{g(x)-f(x)\}\,dx &= \int_0^3 g(x)dx-\int_0^3 f(x)dx \\
&= \int_0^2 -(x^2+2x-8)dx+\int_2^3 (x^2+2x-8)dx+\frac{27}{2} \\
&= \left[-\frac{x^3}{3}-x^2+8x\right]_0^2+\left[\frac{x^3}{3}+x^2-8x\right]_2^3+\frac{27}{2} \\
&= -\frac{8}{3}-4+16+\frac{27}{3}+9-24-\frac{8}{3}-4+16+\frac{27}{2} \\
&= \frac{157}{6}.
\end{aligned}$$

(3) $x^2+(4-3a)x-12a=0$ のとき, $(x+4)(x-3a)=0$ より, $x=-4, 3a$.

[1] $a<0$ のとき
$0 \leqq x \leqq 3$ において, $g(x)=x^2+(4-3a)x-12a$ なので,

$$\begin{aligned}
\int_0^3 \left(x^2+(4-3a)x-12a\right)dx &= \left[\frac{1}{3}x^3+\frac{(4-3a)}{2}x^2-12ax\right]_0^3 \\
&= \frac{27}{3}+\frac{4-3a}{2}\cdot 9-36a \\
&= 9+18-\frac{27}{2}a-36a \\
&= 27-\frac{99}{2}a.
\end{aligned}$$

[2] $0 \leqq a \leqq 1$ のとき
$0 \leqq x \leqq 3a$ において, $g(x)=-x^2-(4-3a)x+12a$,
$3a<x \leqq 3$ において, $g(x)=x^2+(4-3a)x-12a$ なので,

$$\begin{aligned}
\int_0^3 g(x)dx &= \int_0^{3a}\left(-x^2-(4-3a)x+12a\right)dx+\int_{3a}^3\left(x^2+(4-3a)x-12a\right)dx \\
&= \left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{4-3a}{2}x^2+12ax\right]_0^{3a}+\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{4-3a}{2}x^2-12ax\right]_{3a}^3 \\
&= -9a^3-\frac{4-3a}{2}\cdot 9a^2+36a^2+\left(9+\frac{4-3a}{2}\cdot 9-36a\right) \\
&\quad -\left(9a^3+\frac{4-3a}{2}\cdot 9a^2-36a^2\right) \\
&= -9a^3-18a^2+\frac{27}{2}a^3+36a^2+9+18-\frac{27}{2}a-36a-9a^3-18a^2+\frac{27}{2}a^3+36a^2 \\
&= 9a^3+36a^2-\frac{99}{2}a+27.
\end{aligned}$$

[3] $a>1$ のとき
$0 \leqq x \leqq 3$ において, $g(x)=-x^2-(4-3a)x+12a$ なので,

$$
\begin{aligned}
\int_0^3 g(x)dx &= \int_0^3 \left(-x^2-(4-3a)x+12a\right)dx \\
&= \left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{4-3a}{2}x^2+12ax\right]_0^3 \\
&= -9-\frac{4-3a}{2}\cdot 9+36a \\
&= -9-18+\frac{27}{2}a+36a \\
&= -27+\frac{99}{2}a.
\end{aligned}
$$

問題３

(1) 余弦定理より,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{AC}^2 &= \mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2-2\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cdot\cos\angle\mathrm{ABC} \\
&= 4+1-2\cdot 2\cdot 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \\
&= 7.
\end{aligned}
$$

AC>0 であるから, AC$=\sqrt{7}$.

(2) A から直線 BC に垂線を下ろし, 直線 BC との交点を T とおくと, $\angle\mathrm{ABT}=60^\circ$ で, AB=2 なので AT=$\sqrt{3}$, BT $=1$ となる．このとき, B は CT の中点, D は AC の中点であるから AT と DB は平行なので, 三角形 ATC と三角形 DBC は相似である．辺の比を考えると, CT: CB = AT: DB であるから,

$$
\mathrm{DB}=\frac{\sqrt{3}}{2}.
$$

(3) 対頂角であるから $\angle\mathrm{EDA}=\angle\mathrm{BDC}$ であり, 円周角の定理より $\angle\mathrm{EAD}=\angle\mathrm{DBC}$ が成り立つので, 三角形 DAE, DBC は相似である．D は AC の中点なので, DA $=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$, DC $=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$ で, 辺の比を考えると DB:DA = DC:DE であるから,

$$
\mathrm{DE}=\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{7\sqrt{3}}{6}.
$$

(4) $\angle\mathrm{EBC}$ が直角なので, $\angle\mathrm{EBA}=30^\circ$ である．円周角の定理より, $\angle\mathrm{ECA}=30^\circ$ であるから, 三角形 AEC は辺の比が $1:2:\sqrt{3}$ の直角三角形である．AC $=\sqrt{7}$ なので, CE $=\sqrt{7}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{21}}{3}$.

<別解>
$\angle\mathrm{EBC}$ が直角なので, EC は四角形 ABCE の外接円の直径である． この外接円は, 三角形 ABC の外接円でもあるので正弦定理より,

$$
\mathrm{CE}=\frac{\mathrm{AC}}{\sin 120^\circ}=\frac{\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{21}}{3}.
$$

(5) (4) より, AE $=\dfrac{\mathrm{CE}}{2}=\dfrac{\sqrt{21}}{3}$ なので,

$$
\triangle\mathrm{AEC}=\frac{1}{2}\mathrm{AE}\cdot\mathrm{AC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{21}}{3}\cdot\sqrt{7}=\frac{7\sqrt{3}}{6}.
$$

$$\triangle \mathrm{ABC} = \frac{1}{2}\cdot \mathrm{BC}\cdot \mathrm{AT} = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

よって,

$$\mathrm{S} = \triangle \mathrm{AEC} + \triangle \mathrm{ABC} = \frac{7\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

問題 4

(1) 点数の期待値は, $\frac{1}{9}\times 3+\frac{1}{9}\times 2+\frac{1}{9}\times 0+\frac{1}{9}\times 6+\frac{1}{9}\times 2+\frac{1}{9}\times 0+\frac{1}{9}\times 6+\frac{1}{9}\times 2+\frac{1}{9}\times 0=\frac{7}{3}$.

(2) あなたが「C」を出したとき, 点差は, 勝ったら 6 点, 引き分けたら 0 点, 負けたら -3 点. それぞれの確率は $\frac{1}{3}$ なので, 点差の期待値は $\frac{1}{3}\times 6+\frac{1}{3}\times 0+\frac{1}{3}\times(-3)=1$.

(3) 1 回目のゲームで A さんが「G」のカードを出したとき, 2 回目のゲームでの A さんの手持ちのカードは「G」「C」「C」「P」「P」の 5 枚. その中から同様の確からしさで 1 枚のカードが選ばれるので, 1 回目のゲームで A さんが「G」のカードを出したときに, 2 回目のゲームでも A さんが「G」のカードを出す確率は $\frac{1}{5}$.

(4) 1 回目のゲームであなたが「G」のカードを出して勝つ確率は $\frac{1}{9}$. その際, 2 回目のゲームで勝つ確率は, 「G」のカードを出して勝つ確率は $\frac{1}{25}$, 「C」のカードを出して勝つ確率は $\frac{4}{25}$, 「P」のカードを出して勝つ確率は $\frac{4}{25}$ なので, $\frac{1+4+4}{25}=\frac{9}{25}$. 1 回目のゲームで「P」もしくは「C」のカードを出すときのことも同様に考えることで, 求める確率は $3\times\frac{1}{9}\times\frac{9}{25}=\frac{3}{25}$.

(5) 1 回目のゲームであなたが勝つ確率は $\frac{1}{3}$. 条件つき確率の公式から, 求める確率は $\frac{3/25}{1/3}=\frac{9}{25}$.